

## PROCESO ESTRATÉGICO PARA RESOLVER IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS SENCILLAS

**Elizabeth Rincón Santana, José Manuel Ruíz Socarras, Ramón Blanco Sánchez,  
Olga Lidia Pérez González**

Universidad Autónoma de Santo Domingo. (República Dominicana)

Universidad de Camagüey. (Cuba)

te10elirisa@gmail.com, jose.ruiz@reduc.edu.cu, ramón.blanco@reduc.edu.cu, olguitapg@gmail.com

**Palabras clave:** LSM, SMD, señas propuestas

**Key words:** MSL, DMS, proposed signs.

### RESUMEN

Se presenta el juego matemático como un medio de enseñanza aprendizaje para la comprobación de identidades trigonométricas, con el objetivo de favorecer el pensamiento deductivo de los estudiantes y proporcionarles estrategias básicas que ayuden a simplificar expresiones trigonométricas. Esta estrategia forma parte de un conjunto de materiales didácticos, medios para el aprendizaje y procedimientos en el aula que se pretenden implementar como parte de las aportaciones derivadas del proyecto de doctorado de la autora principal del trabajo, el cual está orientado a investigar sobre organización del proceso docente de la Geometría y la Trigonometría Plana, que se sustenta en la estructura sistémica de la Matemática y su lógica de desarrollo intrínseca, que pretende tributar a la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de estas importantes ramas de la Matemática.

### ABSTRACT

Mathematical game is presented as a means of learning for verification of trigonometric identities, in order to favor the deductive thinking skills and provide basic strategies that help simplify trigonometric expressions. This strategy is part of a set of learning materials, learning and classroom procedures that are to be implemented as part of the contributions from the PhD project of the first author of the work, which is oriented to research organization teaching process of Geometry and Trigonometry Plana, which is based on the systemic structure of mathematics and logic intrinsic development aims to pay tribute to the improvement of the process of learning of these important branches of mathematics.

## ■ Introducción

El aprendizaje y la apropiación por parte de los estudiantes de los contenidos de la asignatura “Geometría II y Trigonometría” de la carrera de Educación mención Matemática de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) no se está logrando con el nivel de profundidad requerido en los programas; por lo que se ha propuesto diseñar estrategias que contribuyan a disminuir esta situación problemática (Rincón, 2013).

Diseñar estrategias que tributen a mejorar el proceso docente es una tarea que resulta difícil en estos tiempos modernos, donde el desarrollo tecnológico creciente y la inmensa cantidad de información procesada por minutos, han acelerado el ritmo de la vida de una manera extremadamente agobiante, sin embargo hay que buscar soluciones factibles.

La enseñanza contemporánea se ve modificada, considerablemente, a causa de los resultados recientes de la investigación en matemática educativa de diferentes regiones, que plantean asuntos del aprendizaje ligados al papel de la representación, la visualización y las tecnologías de la información en el diseño de secuencias didácticas novedosas para la escuela (Cantoral, Maldonado y Montiel, 2004, p-371).

Cuando los estudiantes de educación se convierten en maestros se enfrentan a la tarea de conducir el proceso de enseñanza aprendizaje en condiciones diferentes a las que fueron educados, se encuentran rodeados de múltiples recursos en los centros de enseñanzas, que si bien pueden ayudarles, no harán que los alumnos se apropien de los conceptos ni mucho menos que gestionen sus aprendizajes.

Por ejemplo los estudiantes de tercer año de la Educación Media en la República Dominicana, a pesar de tener buenos libros de textos, cantidades de artículos por la web, videos de youtube y muchos otros recursos, no siempre llegan a entender algunas temáticas propias de la trigonometría, como es el caso de la identidades trigonométricas.

## ■ Desarrollo

Un estudio de análisis de pruebas desarrollado por la autora principal de este artículo, con unas 321 pruebas mensuales desarrolladas por alumnos de 15 centros de enseñanza públicos y privados de la zona urbana de la ciudad de Santo Domingo, dentro de los que se destacan el Colegio Dominicano De La Salle, el Liceo experimental Amelia Ricard, Liceo Nocturno de Guerra, entre otros, arrojó resultados alarmantes sobre el dominio de la temática: un porcentaje muy reducido de los alumnos pueden resolver de manera correcta las identidades evaluadas, un grupo también pequeño dentro de la población trabajó el tema de manera errónea y la mayoría de los estudiantes optó por dejar los ejercicios sin efectuar. Esta situación comprueba la deficiencia en la comprensión y posterior demostración del dominio de las identidades trigonométricas.

Se suministró a los alumnos un cuestionario con el objetivo de conocer las opiniones que tienen sobre sus dominios en el tema de identidades. El mismo fue contestado por 302 alumnos de las diferentes escuelas en las que se llevó a cabo el análisis de las pruebas.

Las preguntas estaban dirigidas a verificar si se había desarrollado en el aula el tema de las “Identidades trigonométricas”, determinar las consideraciones de los estudiantes sobre su propio dominio, el nivel de facilidad para el aprendizaje del tema, si podían resolver identidades trigonométricas sin la ayuda del maestro y que expresaran cualquier otra consideración sobre las identidades trigonométricas.

Los resultados arrojados por el estudio se sintetizan en que un 82.6% de los cuestionados calificaron el tema como muy difícil y otro 7% considera que es no es tan fácil aprender a comprobar identidades; el 91.6% de los estudiantes cree no tener dominio del tema. Es preocupante que el 96.2% de los encuestados dice no poder resolver alguna identidad por sí solo, dentro de este grupo un 7.1% expresa que requiere al menos de una pista o ayuda del maestro para encaminar su solución.

Dentro de las consideraciones expresadas por los estudiantes, el 60.8% no tiene interés por el tema, un 51,9% dice carece de aplicaciones prácticas y no lo necesitan para resolver un problema de la vida. El 82% expresa que no contribuye mucho en su formación general.

Además en entrevistas realizadas a los maestros, se pudo comprobar la alta preocupación y el poco manejo en sí en este tema, también lo consideran difícil para enseñar, pues el desarrollo del mismo se basa frecuentemente en explicar en la pizarra algunas comprobaciones de identidades y posteriormente asignarles otras a los estudiantes que generalmente requieren de las mismas dificultades que las enseñadas, lo que implica que no se pueda profundizar en procesos más complejos y por tanto es un proceso repetitivo que los alumnos no logran interiorizar, ni mucho menos incorporar a sus saberes.

También agregan que en general, no hay dominio de los prerrequisitos, los estudiantes no saben realizar sustituciones, desarrollar operaciones con fracciones algebraicas, factorizar, simplificar, entre otras. Esta situación corrobora la necesidad de buscar estrategias que contribuyan a fortalecer los conocimientos previos y el buen desarrollo de este contenido.

Según Tünnermann el docente debe ser un diseñador de métodos de aprendizajes y de innovaciones educativas, que tenga la capacidad de adaptarse a los cambios y a nuevos procesos tecnológicos, que sea creativo y con una actitud positiva hacia la educación permanente.

Díaz Barriga (2002) también manifiesta que las estrategias enriquecen el proceso de enseñanza aprendizaje y deben utilizarse conscientemente con una intencionalidad expresa al logro de un objetivo y con actividades cognitivas y pedagógicas que deben desarrollarse para lograrlas. Quedando siempre en manos del docente la toma de decisiones estratégicas para utilizarlas del mejor modo posible en el momento que crea pertinente.

Una característica inherente al uso de cualquier estrategia es que debe ser motivante, pues como señala Romero (2009), ninguna estrategia que llevemos a cabo puede servir de mucho sin que el alumno o alumna a la que se dirija este motivado por aprender o dispuesto para realizar la actividad, esta es la razón por la que se defiende la idea de que la implementación de un juego estratégico donde se desarrollen identidades podría ayudar a los estudiantes a involucrarse aménamente con el estudio del tema.

El juego como estrategia reviste una gran importancia radicada en el hecho de que no se enfatiza en el aprendizaje memorísticos de hechos o conceptos, sino en la creación de un entorno que estimule a alumnos y alumnas a construir su propio conocimiento y elaborar su propio sentido, dentro del cual el maestro puede conducirlos progresivamente hacia niveles superiores de independencia autonomía y capacidad para aprender, en un contexto de colaboración y sentido comunitario. (Bruner y Haste, citados en López y Bautista, 2002)

Entre los defensores del juego escolar como estrategia básica en los aprendizajes se encuentran Melanie Klein, Jean Piaget, Lev Vigotsky, Miguel De Guzmán y Ovide Decroly, referentes obligados en diversos temas de la enseñanza y autores de importantes teorías lúdicas, valorando la incidencia de las actividades sociales en el aprendizaje eje motor de la matemática educativa.

No obstante las múltiples teorías sobre la efectividad de jugar en las clases de matemáticas, parece que los maestros actuales, sobre todo del nivel Medio han dejado de utilizar estas estrategias. Es posible que se considere que los alumnos ya son adultos y no tienen tiempo para el juego en clase. Pudieran considerar los juegos como actividades infantiles, sin embargo Prieto (1984), presenta al juego como elemento esencial en la vida del ser humano, incidiendo de manera diferente cada período de la vida, diferenciando los juegos libres para el niño y los juegos sistematizados para los adolescentes. Esto lo lleva a considerar el gran valor de los juegos en la educación, para lo que han sido inventados los juegos didácticos o educativos, los que deben elaborarse de modo que puedan provocar el ejercicio de funciones mentales tanto generales como particulares. El juego puede ser divertido y creativo, pero de carácter educativo bastante serio.

Entre las principales ventajas que generan los aprendizajes de los estudiantes mediante el juego se encuentran el desarrollo del pensamiento en general y del pensamiento matemático en particular, el centrarse y prestar atención, además fomenta la autonomía, desarrolla la creatividad, produce entusiasmo, la valoración del trabajo grupal, se aprende a seguir reglas y procedimientos.

En general, los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla (Piaget, 1985).

Se concuerda con la opinión de De Guzmán (2007) cuando resalta la relación estrecha que existe entre el juego y las matemáticas, sirviendo el primero como un método adecuado para transmitir profundo interés y entusiasmo en la familiarización con procesos usados en la actividad matemática, que luego según la frecuencia de utilización, permitirá al estudiante ir creando una serie de estrategias novedosas y creativas que le permiten comprender las reglas y sacar provecho de las mismas, hasta incorporarlas a su acervo intelectual.

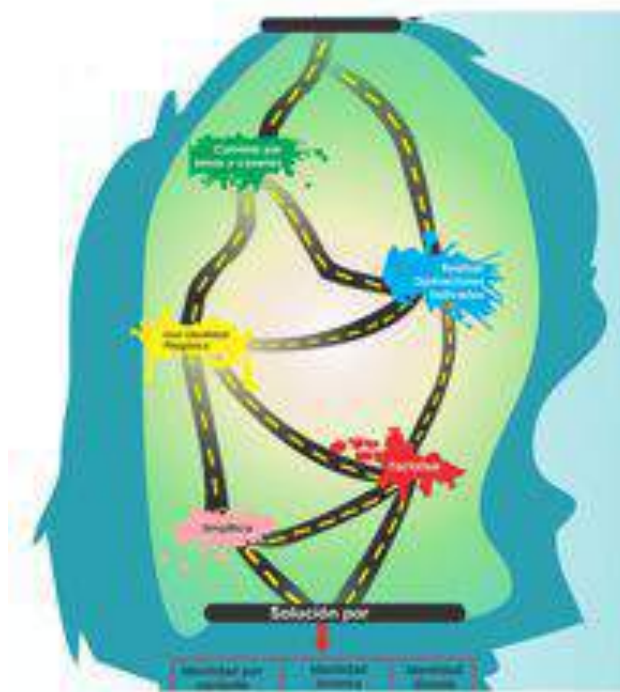
Sin embargo, aunque los juegos pudieran parecer la solución a las dificultades de aprendizajes, en la opinión de los autores no resulta fácil crear un juego que resulte interesante para los estudiantes y para los maestros, las temáticas no siempre se adaptan a las aplicaciones de un buen juego, la mayoría de juegos matemáticos están centrados en las capacidades de razonamientos que no ameritan procesos rigurosos previos, por lo que resulta aún más difícil trabajar contenidos que inherentemente dependan

de otros contenidos previos, por lo que se hace necesaria también la motivación para el dominio de actividades que pueden considerarse prerequisites para poder jugar.

El objetivo fundamental de este trabajo es el diseño de un juego matemático que pueda ser utilizado como medio para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de identidades trigonométricas, para favorecer el pensamiento deductivo de los estudiantes y proporcionarles estrategias básicas para simplificar expresiones trigonométricas.

Las identidades trigonométricas, requieren de un conjunto de concepciones previas, que deberán ser dominadas por el estudiante y verificadas por el maestro con anterioridad al uso de la estrategia lúdica desarrollada en este trabajo, pues no podrán jugar quienes desconocen o tienen dificultades para efectuar operaciones algebraicas, tales como sumar, restar, multiplicar, dividir y simplificar fracciones algebraicas, así como factorizar polinomios. También es necesario el manejo y aplicación las identidades fundamentales directas, inversas y pitagóricas. Este conjunto de operaciones se definen en la estrategia como “procedimientos válidos en el juego”, puesto que se han seleccionado identidades trigonométricas donde se realizan uno o varios de estos los procesos.

El tablero que se ilustra a continuación es la plantilla del juego y señala las posibles rutas que puede transitar el jugador, pudiendo obviar los caminos que conducen a procesos que no son inherentes para la demostración de la identidad, la cual se podrá obtener a través de una de tres posibilidades: identidad directa, por cociente o inversa.



Cada uno de los siguientes procedimientos tiene valor de un (1) punto:

- Cambiar todo por senos y cosenos.
- Realizar operaciones indicadas.
- Usar identidad pitagórica.
- Factorizar.
- Simplificar.

De esta forma una tarjeta puede tener valor hasta cinco (5) puntos, dependiendo de los procesos usados.

Se han seleccionado las 20 expresiones trigonométricas siguientes, que se presentan en forma de tarjetas, cuya igualdad deberá ser completada por cada jugador al momento de realizar la jugada:

$$\cos \theta . \tan \theta = \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta . \operatorname{sen} \theta} = \cot \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta . \tan \theta + \cos \theta = \sec \theta$$

$$\tan \theta . \operatorname{sen} \theta - \sec \theta (1 - 2 \cos^2 \theta) = \cos \theta$$

$$\sec \theta . \cot \theta = \csc \theta$$

$$\frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta . \sec \theta = \tan \theta$$

$$\cos \theta . + \tan \theta . \operatorname{sen} \theta - \sec \theta + \tan \theta = \tan \theta$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} = \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\csc \theta}{\cot \theta + \tan \theta} = \cos \theta$$

$$\frac{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta . \tan \theta}{\operatorname{sen} \theta . \sec \theta} = \csc \theta$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} - 1 = \sec \theta$$

$$\sqrt{(1 - \operatorname{sen} \theta)(1 + \operatorname{sen} \theta)} = \cos \theta$$

$$(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)(\tan \theta + \cot \theta) - \csc \theta = \sec \theta$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta . \sec \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\csc \theta} = \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \csc \theta$$

$$\sec \theta - \sec \theta . \operatorname{sen}^2 \theta = \cos \theta$$

$$\tan \theta . + \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = \sec \theta$$

$$\csc \theta (1 - \cos^2 \theta) = \operatorname{sen} \theta$$

Es preciso aclarar que en las tarjetas, no se presentan las identidades completas, sólo el primer miembro, para no sugerir respuestas obligadas de los jugadores. Las características de las identidades seleccionadas es que se reducen a una función trigonométrica simple, entiéndase el seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante del ángulo.

Las reglas para jugar son las siguientes:

- 1- Seleccionar una tarjeta
- 2- Resolver la identidad utilizando solamente los procedimientos hábiles en el juego (especificados en el tablero).
- 3- El jugador nunca podrá cambiar el orden de los procedimientos, ni puede devolverse en la ruta tomada.
- 4- Por cada paso correcto que seleccione obtendrá un punto. Por cada paso incorrecto perderá un punto.
- 5- Cada jugador desarrolla sus procesos y luego señala la ruta realizada.
- 6- Según la tarjeta seleccionada al azar podrá sumar hasta cinco puntos por identidad bien desarrollada, debiendo usar el proceso más corto y simple. Si un opositor consigue demostrar la identidad por menos pasos anula los puntos del jugador y suma los puntos de su solución a su puntuación.
- 7- El ganador será el jugador que al completar el desarrollo de sus tarjetas, obtenga mayor cantidad de puntos.
- 8- En caso de empate cada jugador debe tomar una tarjeta adicional para sumar más puntos.

Para validar algunos aspectos de esta propuesta, se implementó el juego en forma de ensayo en un grupo 20 de estudiantes del segundo grado del segundo ciclo de la Educación Media (cuarto año de bachillerato) y se valoran en su aplicación además del desbloqueo inmediato que permite la participación casi totalitaria de los estudiantes, la colaboración del grupo en la búsqueda de soluciones, la capacidad exhibida de ingenio y creatividad, la riqueza multilateral y la versatilidad con la que se nutre el proceso de enseñanza aprendizaje cuando se introducen estrategias lúdicas.

#### Conclusiones

Se enfatiza el impacto educativo de los juegos en los salones de clase y la necesidad de continuar relacionándolos con temas del área de Matemática por su estructuración de semejanzas y la sistematicidad que conjuntamente pueden desarrollarse.

La muestra tomada en la implementación de esta propuesta, en su fase inicial, cuantitativamente pequeña pero cualitativamente muy significativa, identifica un alto grado de entusiasmo e interés por parte de los estudiantes al buscar rutas de solución para ganar el juego. Además creó un ambiente de máximo valor educativo, potenciando sus capacidades de razonamientos, un modo divertido de acercamiento a una temática que antes del juego les resultaba difícil y una motivación para aquellos que por poco dominio de algunos o todos los prerrequisitos, no pudieron incursionar en la actividad, por lo que se defiende la estrategia como un modo para que los estudiantes puedan adquirir altos niveles de destrezas matemáticas en la comprobación de identidades.



Habrá que seguir incorporando estrategias variadas, motivadoras, ingeniosas, eficaces, pertinentes y de valor educativo, para poder hacerle frente a la difícil tarea de enseñar, asumiendo viejos paradigmas, con las modificaciones pertinentes que logren adecuarlos a tiempos modernos y al creciente desarrollo tecnológico.

### ■ Referencias bibliográficas

- Cantoral, R., Maldonado, S. y Montiel, G. (2004). Construyendo la noción de función trigonométrica: estrategias de aprendizaje. En L. Díaz Moreno (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17 (pp. 81-576). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- De Guzmán, M. (2007). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: Editorial Popular.
- Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una experiencia constructivista*. México: Mc Graw-Hill.
- Negrete, J. (2007). *Estrategias para el aprendizaje*, México: Mc Graw-Hill.
- López, N. y Bautista, J. (2002) *El juego didáctico como estrategia de atención a la diversidad*. Recuperado 24 de marzo de 2014 en <http://www.uhu.es/agora/version01/digital/numeros/04/04>
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de psicología*. España: Editorial Labor, SA.
- Prieto, J. (1984). *Principios generales de la educación*. Venezuela: Montes Avilas Editores.
- Rincón, E. (2013). *Organización del proceso docente de la geometría y trigonometría plana*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Camagüey. Cuba.
- Romero, G. (2009). *Estrategias didácticas en clase*. Recuperado 18 de abril del 2014 de [http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod\\_ense/revista/pdf/Numero\\_23/GUSTAVO\\_ADOLFO\\_ROMERO\\_BAREA02.pdf](http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_23/GUSTAVO_ADOLFO_ROMERO_BAREA02.pdf)
- Tünnermann, C. (sf). *Rol del docente en la educación superior del siglo XXI*. Recuperado el 15 de junio de 2014 de <http://www.articuloz.com/ciencia-articulos/el-rol-docente-en-la-ensenanza-559485.html>